

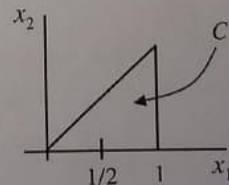
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ
Đề thi kết thúc môn học: Học kỳ I, năm học 2020-2021
Môn thi: ELT2029 - Toán trong công nghệ

- Thời gian làm bài: 120 phút.
- Không sử dụng tài liệu và các thiết bị điện tử.

1. [2,5 điểm] Một modem phát tín hiệu điện áp $+2V$ qua kênh, bị ảnh hưởng bởi nhiễu nhận các giá trị $\{0, -1, -2, -3\}$ với xác suất tương ứng $\{\frac{4}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}\}$.
 - (a) Tính hàm khối xác suất (pmf) của lỗi ra kênh.
 - (b) Tính xác suất để lỗi ra kênh bằng với lỗi vào của kênh.
 - (c) Tính xác suất để lỗi ra kênh dương.

2. [2,5 điểm] Hệ thống truyền tin nhị phân phát tín hiệu X (bằng $+5V$ nếu phát bit 1 và $-5V$ nếu phát bit 0), khả năng phát bit 0 và bit 1 như nhau. Tín hiệu thu được tại nơi thu là $Y = X + N$ với N là biến ngẫu nhiên phân bố Gauss trung bình bằng 0, phương sai $\sigma^2 = 2$.
 - (a) Xác định hàm mật độ xác suất của Y khi biết tín hiệu phát $X = +5V$ và khi biết tín hiệu phát là $X = -5V$.
 - (b) Tùy thuộc vào giá trị y nhận được so với ngưỡng quyết định, bộ thu sẽ quyết định là bit 0 nếu giá trị này nhỏ hơn ngưỡng và bit 1 nếu giá trị này lớn hơn ngưỡng. Xác định ngưỡng quyết định của hệ thống khi biết luật quyết định tương đương là: $f_Y(y|X = -5V)P[X = -5V] > f_Y(y|X = +5V)P[X = +5V]$ sẽ quyết định là bit 0 và ngược lại sẽ quyết định là bit 1.
 - (c) Tính xác suất để bộ thu quyết định sai với điều kiện bit 0 được phát và bit 1 được phát. Tính xác suất quyết định sai tổng cộng.

3. [2,5 điểm] Hai biến ngẫu nhiên phân bố đều trên vùng x_1, x_2 với $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = C$ trong khoảng $0 \leq x_2 \leq x_1 \leq 1$, được biểu diễn ở hình dưới.
 - (a) Tính hằng số C . Tính $P[X_1 > \frac{1}{2}]$
 - (b) Tính các pdf lề $f_{X_1}(x_1)$ và $f_{X_2}(x_2)$.
 - (c) Hai biến ngẫu nhiên có độc lập không? Vì sao?
 - (d) Tính các pdf có điều kiện $f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$ và $f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)$.



4. [2,5 điểm] 4.1. Chứng minh rằng trung bình mẫu là phép ước lượng không lệch và có phương sai tiến đến 0 khi số mẫu tiến đến vô cùng.
 4.2. Một tổng đài nhận các cuộc gọi có giá thành cuộc gọi là biến ngẫu nhiên i.i.d với trung bình 2.500đ và phương sai 900đ.
 - (a) Tính xác suất để 400 cuộc gọi đầu tiên có tổng số tiền nhiều hơn 1.600.000đ
 - (b) Tính xác suất để 400 cuộc gọi đầu tiên có tổng số tiền nằm trong khoảng 760.000đ đến 1.240.000đ.
 - (c) Cần bao nhiêu đơn đặt hàng để chắc chắn 95% tổng số tiền lớn hơn 2.000.000đ.

5. [2,5 điểm] Hai biến ngẫu nhiên X_1 và X_2 (trung bình bằng 0, phương sai bằng 1) có pdf Gauss đồng thời như sau:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)}{2(1-\rho^2)}}$$

(a) Tính ma trận hiệp phương sai K_X biết hệ số tương quan giữa hai biến ngẫu nhiên X_1 và X_2 là $\rho = \frac{1}{2}$ và

$$K_X = E[(X - \mathbf{m})(X - \mathbf{m})^T] = \begin{bmatrix} E[(X_1 - m_1)^2] & E[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)] \\ E[(X_2 - m_2)(X_1 - m_1)] & E[(X_2 - m_2)^2] \end{bmatrix}$$

(b) Hai biến ngẫu nhiên mới Y_1 and Y_2 được cho bởi:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

dưới dạng ma trận $Y=AX$. Chứng minh liên hệ giữa hai ma trận hiệp phương sai là $K_Y = AK_X A^T$.

(c) Tìm a để ánh xạ là một - một và hai biến ngẫu nhiên Y_1 và Y_2 không tương quan.